

Второй тур 28.11.2024. Высшая лига.

1. Дана последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots . Известно, что для любых различных натуральных m и n число $\frac{a_m + a_n}{m + n}$ представляется в виде отношения двух нечётных чисел; также $a_n \leq 3n$ при всех n . Докажите, что каждое делящееся на 3 натуральное число встречается в этой последовательности ровно один раз.

2. Даны два тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$; каждое ребро второго тетраэдра длиннее соответствующего ребра первого ровно на метр. Обязательно ли внутри второго тетраэдра можно разместить тетраэдр, равный первому? (Точкам нового тетраэдра разрешено попадать на границу второго.)

3. Найдите наименьшее C , для которого можно выбрать такое множество T , состоящее из 2024 неотрицательных целых чисел, не превосходящих 6000, что для любых неотрицательных чисел $x_0, x_1, \dots, x_{2000}$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{p+q+r \in T} x_p x_q x_r \leq C \left(\sum_{j=0}^{2000} x_j \right)^3.$$

4. Пусть n — натуральное число; обозначим $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Для каждого $i \in X_n$ выбраны попарно непересекающиеся множества A_i , B_i и C_i такие, что $A_i \cup B_i \cup C_i = X_n \setminus \{i\}$ и $|A_i| = |B_i|$. Предположим, что

$$|A_i \cap B_j| + |B_i \cap C_j| + |C_i \cap A_j| = |B_i \cap A_j| + |C_i \cap B_j| + |A_i \cap C_j|$$

для всех $i, j \in X_n$. Докажите, что $i \in A_j$ тогда и только тогда, когда $j \in A_i$.

5. Геодезическим путём в графе назовём путь между двумя различными вершинами a и b такой, что не существует пути из a в b меньшей длины, все вершины которого являются вершинами исходного пути. В связном графе (хотя бы с двумя вершинами) оказалось, что для любых двух различных вершин все геодезические пути между ними имеют равную длину. Докажите, что в графе найдётся либо вершина, удаление которой нарушает связность, либо две вершины-близнеца. (Близнецами называют две вершины такие, что каждая другая вершина либо смежна с обеими, либо не смежна с обеими).

6. Точки A, B, C, D, E, F на плоскости таковы, что каждая из четвёрок (A, B, C, D) , (C, D, E, F) , (E, F, A, B) лежит на одной окружности, и все эти окружности различны. Оказалось, что $AB \perp DE$, $BC \perp EF$, $CD \perp FA$. Прямые BC, DE, FA образуют треугольник T_1 , а прямые AD, BE, CF — треугольник T_2 . Докажите, что их описанные окружности касаются.

7. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами и натуральное число k таковы, что многочлен $x^k P(x+1) + (x-1)^k P(x-1)$ делится на $P(x)$. Докажите, что $(P(x+1))^2 = (P(-x))^2$.

8. Пусть $q > p$ — нечётные взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим на координатной плоскости точки с целыми координатами (a, b) такие, что $0 \leq a, b \leq pq - 1$, число $1 + a + b$ делится на q , а число $b - a$ делится на p . Раскрасим все точки плоскости с целыми координатами в шахматном порядке. Докажите, что среди рассматриваемых pq точек количества чёрных и белых отличаются не более, чем на $q - p + 1$.

9. В королевстве живут рыцари, сила каждого — целое число от 1 до 10^6 . Если два рыцаря вступают в бой, то каждый рыцарь, который не сильнее соперника или для которого это третий бой, погибает. Если же рыцарь не удовлетворяет этим условиям, то он выживает.

Король выбирает последовательность сил $a_1 \leq \dots \leq a_n$, берёт две группы рыцарей, у которых такие силы, и выстраивает каждую группу в шеренгу по неубыванию силы (слева направо), одна справа от другой. Затем два рыцаря из разных групп, оказавшиеся рядом, вступают в бой. После окончания боя снова два соседних рыцаря из разных групп вступают в бой, и т.д. Пусть $f(n)$ — количество последовательностей $a_1 \leq \dots \leq a_n$, для которых в результате этого процесса не останется живых рыцарей. Докажите, что $f(4k+1) = f(4k+2) = f(4k+3)$ для любого натурального k .

10. Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC соответственно. Точки P и Q выбраны на описанной окружности ω так, что $\angle BPH = \angle CQH = 90^\circ$. Пусть прямая PQ пересекает касательную к ω , проведенную в точке A , в точке S , а отрезки OP и OQ пересекают отрезки BH и CH в точках X и Y соответственно. Докажите, что $OS \parallel XY$.

Второй тур 28.11.2024. Первая лига.

1. Дана последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots . Известно, что для любых различных натуральных m и n число $\frac{a_m + a_n}{m + n}$ представляется в виде отношения двух нечётных чисел; также $a_n \leq 3n$ при всех n . Докажите, что каждое делящееся на 3 натуральное число встречается в этой последовательности ровно один раз.

2. Даны два тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$; каждое ребро второго тетраэдра длиннее соответствующего ребра первого ровно на метр. Обязательно ли внутри второго тетраэдра можно разместить тетраэдр, равный первому? (Точкам нового тетраэдра разрешено попадать на границу второго.)

3. Найдите наименьшее C , для которого можно выбрать такое множество T , состоящее из 2024 неотрицательных целых чисел, не превосходящих 6000, что для любых неотрицательных чисел $x_0, x_1, \dots, x_{2000}$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{p+q+r \in T} x_p x_q x_r \leq C \left(\sum_{j=0}^{2000} x_j \right)^3.$$

4. Пусть n — натуральное число; обозначим $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Для каждого $i \in X_n$ выбраны попарно непересекающиеся множества A_i , B_i и C_i такие, что $A_i \cup B_i \cup C_i = X_n \setminus \{i\}$ и $|A_i| = |B_i|$. Предположим, что

$$|A_i \cap B_j| + |B_i \cap C_j| + |C_i \cap A_j| = |B_i \cap A_j| + |C_i \cap B_j| + |A_i \cap C_j|$$

для всех $i, j \in X_n$. Докажите, что $i \in A_j$ тогда и только тогда, когда $j \in A_i$.

5. На вечеринке присутствуют n человек. Среди них есть не более $n - 1$ пары друзей (пары (A, B) и (B, A) считаются совпадающими). Два человека пожимают друг другу руки тогда и только тогда, когда у них есть хотя бы один общий друг. Дано целое число $m \geq 3$ такое, что $n \leq m^3$. Докажите, что существует человек A , который пожал руку не более чем $d \cdot (m - 1)$ людям, где d — количество друзей A .

6. Точки A, B, C, D, E, F на плоскости таковы, что каждая из четвёрок (A, B, C, D) , (C, D, E, F) , (E, F, A, B) лежит на одной окружности, и все эти окружности различны. Оказалось, что $AB \perp DE$, $BC \perp EF$, $CD \perp FA$. Прямые BC, DE, FA образуют треугольник T_1 , а прямые AD, BE, CF — треугольник T_2 . Докажите, что их описанные окружности касаются.

7. Дано простое число p . Пусть n — наименьшее натуральное число, большее 1, такое, что $n^6 - 1$ делится на p . Докажите, что тогда одно из чисел $(n + 1)^6 - 1$ или $(n + 2)^6 - 1$ также делится на p .

8. Пусть $q > p$ — нечётные взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим на координатной плоскости точки с целыми координатами (a, b) такие, что $0 \leq a, b \leq pq - 1$, число $1 + a + b$ делится на q , а число $b - a$ делится на p . Раскрасим все точки плоскости с целыми координатами в шахматном порядке. Докажите, что среди рассматриваемых pq точек количества чёрных и белых отличаются не более, чем на $q - p + 1$.

9. В королевстве живут рыцари, сила каждого — целое число от 1 до 10^6 . Если два рыцаря вступают в бой, то каждый рыцарь, который не сильнее соперника или для которого это третий бой, погибает. Если же рыцарь не удовлетворяет этим условиям, то он выживает.

Король выбирает последовательность сил $a_1 \leq \dots \leq a_n$, берёт две группы рыцарей, у которых такие силы, и выстраивает каждую группу в шеренгу по неубыванию силы (слева направо), одна справа от другой. Затем два рыцаря из разных групп, оказавшиеся рядом, вступают в бой. После окончания боя снова два соседних рыцаря из разных групп вступают в бой, и т.д. Пусть $f(n)$ — количество последовательностей $a_1 \leq \dots \leq a_n$, для которых в результате этого процесса не останется живых рыцарей. Докажите, что $f(4k + 1) = f(4k + 2) = f(4k + 3)$ для любого натурального k .

10. Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC соответственно. Точки P и Q выбраны на описанной окружности ω так, что $\angle BPH = \angle CQH = 90^\circ$. Пусть прямая PQ пересекает касательную к ω , проведенную в точке A , в точке S , а отрезки OP и OQ пересекают отрезки BH и CH в точках X и Y соответственно. Докажите, что $OS \parallel XY$.